SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO ĐAKLAK
TRƯỜNG THPT VIỆT ĐỨC

CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC

ĐỀ TÀI:

MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

(CHUYÊN ĐỀ KIỂM TRA NỘI BỘ THÁNG 10/2018)

Người thực hiện: CAO TRỌNG BAN

Năm học: 2018 – 2019

MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

Phần một: Phần Mở Đầu

Lí do chọn đề tài

Trong toán học bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunyakovski là hai bất đẳng thức cổ điển có nhiều ứng dụng trong giải toán. Chúng được sử dụng nhiều trong chương trình giải toán phổ thông đặc biệt là trong các kì thi tuyển sinh đại học và các kì thi học sinh giỏi. Đề tài về hai bất đẳng thức này là không mới. Tuy nhiên em vẫn chọn đề tài này do đây là mảng kiến thức em thích, em đã giải khá nhiều bài toán có ứng dụng hai bất đẳng thức này nhưng bản thân em vẫn chưa tổng kết được các phương pháp sử dụng hai bất đẳng thức trên trong giải toán. Vì vậy khi nghiên cứu đề tài này sẽ giúp em hệ thống lại các kỹ thuật sử dụng hai bất đẳng thức này một cách rõ ràng hơn. Và sau này khi trở thành giáo viên em sẽ thấy tự tin hơn khi giảng dạy về mảng kiến thức này từ đó giúp học sinh hiểu rõ hơn. Bên cạnh đó, em thấy đề tài này cũng hợp với khả năng của mình, đặc biệt em thực hiện đề tài này với sự hướng dẫn tận tình của giáo viên hướng dẫn cùng với nguồn tài liệu không ít nên em tin mình có thể hoàn thành tốt đề tài này.

Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp tham khảo tài liệu là chủ yếu.

Phần hai: Nội Dung Nghiên Cứu

MỘT SỐ QUY TẮC CHUNG KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

Quy tắc song hành: Đa số các bất đẳng thức đều có tính đối xứng nên chúng ta có thể sử dụng nhiều bất đẳng thức trong chứng minh một bài toán để định hướng cách giải nhanh hơn.

Quy tắc dấu bằng: Dấu “=” trong bất đẳng thức có vai trò rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh, định hướng cho ta cách giải. Chính vì vậy khi giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc các bài toán cực trị ta cần rèn luyện cho mình thói quen tìm điều kiện của dấu bằng mặc dù một số bài không yêu cầu trình bày phần này.

Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng: Chúng ta thường mắc sai lầm về tính xảy ra đồng thời của dấu “=” khi áp dụng liên tiếp hoặc song hành nhiều bất đẳng thức. Khi áp dụng liên tiếp hoặc song hành nhiều bất đẳng thức thì các dấu “=” phải cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.

Quy tắc biên: Đối với các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc thì cực trị thường đạt được tại vị trí biên.

Quy tắc đối xứng: Các bất đẳng thức có tính đối xứng thì vai trò của các biến trong các bất đẳng thức là như nhau do đó dấu “=” thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có điều kiện đối xứng thì chúng ta có thể chỉ ra dấu “=”xảy ra tại khi các biến đó bằng nhau và bằng một giá trụ cụ thể.

MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \in Z, n \geq 2$, ta luôn có:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n.\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Kỹ thuật tách ghép bộ số

Kỹ thuật tách ghép cơ bản

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac}=8abc$ (đpcm)

Bài 2: Cho 4 số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{(a+b)(c+d)}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{\sqrt{(a+b)(c+d)}}=\sqrt{\frac{a}{(a+b)}.\frac{c}{(c+d)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+b)}.\frac{d}{(c+d)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{d}{c+d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}\right)=1$$

$\Rightarrow\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{(a+b)(c+d)}$ (đpcm)

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases}a>c\\b>c\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{(a-c)}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{(b-c)}{b}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+1-\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+1-\frac{c}{b}\right)=1$$

$\Rightarrow\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$ (đpcm)

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$1+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1+\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}}\le\sqrt[3]{\frac{1}{(1+a)}.\frac{1}{(1+b)}.\frac{1}{(1+c)}}+\sqrt[3]{\frac{a}{(1+a)}.\frac{b}{(1+b)}.\frac{c}{(1+c)}}$$

$$\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right)$$

$$\le\frac{1}{3}\left(\frac{1+a}{1+a}+\frac{1+b}{1+b}+\frac{1+c}{1+c}\right)=1$$

$\Rightarrow 1+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$ (đpcm)

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $\begin{cases}a\ge 1\\b\ge 1\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a\sqrt{b-1}=\sqrt{a}\sqrt{ab-a}\le\frac{1}{2}(a+ab-a)=\frac{ab}{2}\quad (1)$$

Tương tự: $b\sqrt{a-1}\le\frac{ab}{2}$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$ (đpcm)

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2\le(a+b)^4$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$16ab(a-b)^2=4.(4ab)(a-b)^2\le 4.\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2=4.\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2=(a+b)^4 \text{ (đpcm)}$$

Bài 7: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)\ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Giải:

Ta có:

$a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)=(a+b+c)+(ab+bc+ca)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

$ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

$\Rightarrow(a+b+c)+(ab+bc+ca)\ge 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{abc}\left(1+3\sqrt[3]{abc}\right)$

$\Rightarrow a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)\ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$ (đpcm)

Bài 8: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge a+b+1$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\left(\frac{ab}{2}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{ab}{2}+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{b}{2a}}+2\sqrt{\frac{a}{2b}.\frac{b}{2a}}=a+b+1 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 9: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=10$. Tìm GTLN của: $A=a^2b^3c^5$

Giải:

Ta có:

$$10=a+b+c=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}\ge 10\sqrt[10]{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{b}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{5}\right)^5}$$

$$\Rightarrow\sqrt[10]{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{b}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{5}\right)^5}\le 1\Rightarrow\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{b}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{5}\right)^5\le 1\Rightarrow a^2b^3c^5\le 2^2 3^3 5^5=337500$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}\\ a+b+c=10\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{10}=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\\ c=5\end{cases}$

Vậy GTLN của A là 337500.

Kỹ thuật tách nghịch đảo

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\forall a,b>0$

Giải:

Vì $a,b>0$ nên $\frac{a}{b}>0,\ \frac{b}{a}>0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{a-1}\geq 3$, $\forall a>1$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1\geq 2\sqrt{(a-1)\frac{1}{a-1}}+1=2+1=3 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2$, $\forall a\in \boldsymbol{R}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{3a^2}{1+9a^4}\leq \frac{1}{2}, \forall a\neq 0$

Giải:

Với $\forall a\neq 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{3a^2}{1+9a^4}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+\frac{9a^4}{3a^2}}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+3a^2}\leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3a^2}.3a^2}}=\frac{1}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2}{a+1}+2\right)^2$, $\forall a\neq -1$

Giải:

$$A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2+2a+2}{a+1}\right)^2$$

$$=(a+1)^2+\left[\frac{(a+1)^2+1}{a+1}\right]^2$$

$$=(a+1)^2+\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$=2(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2\overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{2(a+1)^2\frac{1}{(a+1)^2}}+2=2\sqrt{2}+2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2(a+1)^2=\frac{1}{(a+1)^2}$ hay $a=\frac{-2\pm\sqrt[4]{8}}{2}$

Vậy GTNN của $A=2\sqrt{2}+2$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = a + \frac{2}{a^2}, \forall a > 0$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$A = a + \frac{2}{a^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{2} = \frac{2}{a^2}$ hay $a = \sqrt[3]{4}$

Vậy GTNN của $A = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$

Bài 7: Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{b(a-b)} \ge 3, \forall a > b > 0$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \ge 3\sqrt[3]{b.(a-b).\frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

Bài 8: Chứng minh rằng: $a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \ge 3, \forall a > b > 0$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \frac{(b+1)}{2} + \frac{(b+1)}{2} + \frac{1}{(a-b)\frac{(b+1)}{2}\frac{(b+1)}{2}} - 1$$

$$\ge 4.\sqrt[4]{(a-b).\frac{(b+1)}{2}.\frac{(b+1)}{2}.\frac{1}{(a-b)\frac{(b+1)}{2}\frac{(b+1)}{2}}} - 1 = 3$$

Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong kỹ thuật ghép đối xứng ta cần nắm một số thao tác sau:

Phép cộng: $\begin{cases} a+b+c = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \\ 2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a) \end{cases}$

Phép nhân: $\begin{cases} abc = \sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}, \qquad (a,b,c \ge 0) \\ a^2b^2c^2 = (ab)(bc)(ca) \end{cases}$

Bài 1: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge a + b + c$

Giải:

Ta có:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right)$$

$$\ge \sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}} = a + b + c$$

Bài 2: Cho ba số thực $abc \ne 0$. CMR: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\geq\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2}.\frac{c^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}.\frac{a^2}{b^2}}=\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+\left|\frac{a}{c}\right|\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

<u>Bài 3:</u> Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. CMR:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

<u>Giải:</u>

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}}$$

$$=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Vậy $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

<u>Bài 4:</u> Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{1}{8}abc$$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$$

$$\leq\frac{(p-a)+(p-b)}{2}.\frac{(p-b)+(p-c)}{2}.\frac{(p-c)+(p-a)}{2}$$

$$\leq\frac{2p-(a+b)}{2}.\frac{2p-(b+c)}{2}.\frac{2p-(c+a)}{2}=\frac{1}{8}abc$$

<u>Bài 5:</u> Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\right)$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}+\frac{1}{\sqrt{(p-c)(p-a)}}$$
$$\geq \frac{1}{\frac{(p-a)+(p-b)}{2}}+\frac{1}{\frac{(p-b)+(p-c)}{2}}+\frac{1}{\frac{(p-c)+(p-a)}{2}}$$
$$\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo

Trong kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo ta ứng dụng bất đẳng thức sau

Với $n \in N^*$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thì

$$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+..+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

Chứng minh bất đẳng thức trên :

Ta có với $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thì

$$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+..+\frac{1}{x_n}\right) \geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}.n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2...x_n}} = n^2$$

Với $n=3$ và $x_1, x_2, x_3 > 0$ thì

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) \geq 9$$

<u>Bài 1:</u> Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)-3$$
$$=\frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}-3$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3 \geq 9-3=6$$

<u>Bài 2:</u> Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

(Bất đẳng thức Nesbit)

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)-3$$
$$=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}-3$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$
$$=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$
$$\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

Bài 3: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$

Giải:

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}=\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)-(a+b+c)$$
$$=c\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)-(a+b+c)$$
$$=c\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)+a\left(\frac{b+c+a}{b+c}\right)+b\left(\frac{c+a+b}{c+a}\right)-(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)-(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}-1\right)$$

Theo bất đẳng thức Nesbit đã chứng minh ở bài 2 thì:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq(a+b+c)\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{a+b+c}{2}\ \text{(đpcm)}$$

Bài 4: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\leq 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9$$

Giải:

Do $a+b+c\leq 1$ ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)$$
$$=\left[\left(a^2+2bc\right)+\left(b^2+2ac\right)+\left(c^2+2ab\right)\right]\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)\geq 9$$

Kỹ thuật đổi biến số

Có những bài toán về mặt biểu thức toán học tương đối cồng kềnh, khó nhận biết được phương hướng giải. Bằng cách đổi biến số, ta có thể đưa bài toán về dạng đơn giản và dễ nhận biết hơn.

Bài 1: Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b$. CMR:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc\ (1)$$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$x.y.z \le \frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}$$

Do trong tam giác, tổng độ dài của hai cạnh luôn lớn hơn độ dài cạnh còn lại nên :

$$x,y,z>0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2} \ge \sqrt{xy}.\sqrt{yz}\sqrt{zx}=xyz$$

Hay $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$ (đpcm)

Bài 2: Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b.$ CMR:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3 (1)$$

Giải:

Đặt:

$$\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Khi đó vế trái của bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}$$

Ta có:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)$$

$$\ge \frac{2}{2}\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{y}{z}}=3$$

Hay $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \ge 3$ (đpcm)

Bài 3: Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b.$ CMR:

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c} \ge a+b+c \, (1)$$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\ge x+y+z$$

$$\frac{y+z\ ^{2}}{4x}+\frac{z+x\ ^{2}}{4y}+\frac{x+y\ ^{2}}{4z}\ge \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=$$

Ta có: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}\right)$

$$\ge \sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}}=z+x+y$$

Hay $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$ (đpcm)

Bài 4: Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\ge \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1)$$

Giải:

Ta có: $p-a=\dfrac{b+c-a}{2}>0$

Tương tự:

$p-b>0$

$p-c>0$

Đặt: $\begin{cases} p-a=x>0 \\ p-b=y>0 \\ p-c=z>0 \end{cases} \Rightarrow p=x+y+z$

Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge \frac{x+y+z}{xyz}$$

Ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\ge \sqrt{\frac{1}{x^2}.\frac{1}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{y^2}.\frac{1}{z^2}}+\sqrt{\frac{1}{z^2}\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}$$

Hay $\dfrac{1}{(p-a)^2}+\dfrac{1}{(p-b)^2}+\dfrac{1}{(p-c)^2}\ge \dfrac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ (đpcm)

Bài 5: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge \dfrac{3}{2}$ (1)

Giải:

Đặt: $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y \\ a+b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z-x}{2} \\ b=\dfrac{z+x-y}{2} \\ c=\dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\frac{1}{2}$$

Ta có:

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}$$

$$\ge\frac{2}{2}\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+\frac{2}{2}\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{y}{z}}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Hay $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ (đpcm)